

# УЛЬТРАРАСШИРЕНИЯ ИНФИНИТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Л. Поляков

Ультрарасширения унарных и бинарных функций и отношений рассматривались начиная с 30-х годов XX века. Результаты нашли применение в комбинаторике, модальной логике и др. Ультрарасширения моделей первого порядка изучались в [1]. Мы показываем, что операция ультрарасширения может быть распространена на непрерывные (относительно Бэровской топологии) функции  $f : \omega^\omega \rightarrow \omega$ . Конструкция имеет отношение к порядкам Рудин-Кейслера и Комфорта и может быть использована для получения результатов рамсеевского типа.

Множество  $\mathcal{B}$  непрерывных функции  $f : \omega^\omega \rightarrow \omega$  допускает следующую ординальную иерархию:  $\mathcal{B}_0$  есть множество всех постоянных функций  $f : \omega^\omega \rightarrow \omega$ ; и для каждого  $\alpha \in \text{Ord}$ ,  $\mathcal{B}_{<\alpha} = \bigcup_{\gamma < \alpha} \mathcal{B}_\gamma$  и  $\mathcal{B}_\alpha = \{f \in \omega^{\omega^\omega} : (\forall x \in \omega) f_{(x)} \in \mathcal{B}_{<\alpha}\}$ , где  $f_{(x)}(x_1, x_2, \dots) = f(x, x_1, x_2, \dots)$  для всех  $x, x_1, x_2, \dots \in \omega$ . Тогда  $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ .

Для каждой функции  $f \in \mathcal{B}$  ее ультрарасширение  $\tilde{f} : (\beta\omega)^\omega \rightarrow \beta\omega$  определяется так: если  $f \in \mathcal{B}_0$  и  $f(\mathbf{x}) \equiv n$ , то  $\tilde{f}$  есть постоянная функция, значение которой есть главный ультрафильтр, порожденный  $n$ ; если  $0 < \alpha < \omega_1$ ,  $f \in \mathcal{B}_\alpha$  и  $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots \in \beta\omega$ , то  $\tilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots) = \{S \subseteq \omega : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X) S \in \tilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \dots)\}$ .

Следующая теорема развивает результаты из [2]. Ранг функции  $f \in \mathcal{B}$  есть ординал  $\text{rank } f = \min\{\alpha < \omega_1 : f \in \mathcal{B}_\alpha\}$ . Для каждого  $\alpha > 0$  определим множество  $\mathcal{BU}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ :  $f \in \mathcal{BU}_1$  т.т.т.  $f(x_0, x_1, \dots) = g(x_0)$  для некоторой инъекции  $g : \omega \rightarrow \omega$ ;  $f \in \mathcal{BU}_\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , т.т.т. (а)  $f(x_0, x_1, \dots) = f(y_0, y_1, \dots) \Rightarrow x_0 = y_0$ , (б) последовательность  $\{\text{rank } f_{(i)}\}_{i < \omega}$  не убывает и конфиньальна в  $\alpha$  и (в)  $(\forall x \in \omega) f_{(x)} \in \bigcup_{\gamma < \alpha} \mathcal{BU}_\gamma$ .

**Теорема.** Для любого  $\mathfrak{u} \in \beta\omega \setminus \omega$  следующие условия равносильны:

- (i)  $\mathfrak{u}$  есть РК-минимальный ультрафильтр,
- (ii) для любого счетного ординала  $\alpha$  и функции  $f \in \mathcal{B}_\alpha$  существуют ординал  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq \alpha$ , и функция  $g \in \mathcal{BU}_\gamma \cup \mathcal{B}_0$ , для которых  $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots) = \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots)$ .

Рангом непрерывной функции  $\varphi : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$  назовем ординал  $\sup\{\text{rank } \pi_i \circ \varphi : i < \omega\}$ , где  $\pi_i$  есть  $i$ -ая проекция. Функцию  $\varphi : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$  назовем *сжимающей*, если  $\varphi(\mathbf{x})$  есть подпоследовательность  $\mathbf{x}$  для каждой последовательности  $\mathbf{x} \in \omega^\omega$ .

**Следствие (каноническая теорема Рамсея для инфинитарных функций).** Для любого счетного ординала  $\alpha$  и функции  $f \in \mathcal{B}_\alpha$  существуют множество  $X \in \mathfrak{u}$ , ординал  $\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq \alpha$ , функция  $g \in \mathcal{BU}_\gamma \cup \mathcal{B}_0$  и сжимающая непрерывная (относительно Бэровской топологии) функция  $\varphi : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$  ранга не более  $\alpha$ , для которых  $f(\mathbf{x}) = g(\varphi(\mathbf{x}))$  для любой возрастающей последовательности  $\mathbf{x} \in X^\omega$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Poliakov N.L., Saveliev D.I.* On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic. V. 60. P. 625–681 (2021).
- [2] *Polyakov N. L.* On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters. Doklady Mathematics, to appear (2023).

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва  
Email address: npolyakov@hse.ru